**Лабораторна робота № 1**

**Тема: Наближене розв`язування нелінійних рівнянь**

# 1.Постановка задачі

Задача розв’язання рівняння часто всього зустрічається при вивченні загально-технічних і спеціальних дисциплін, в інженерній практиці. Знайти точне значення кореня рівняння можливе лише в деяких окремих часткових випадках, причому навіть в цих випадках формули знаходження коренів бувають настільки громіздкими ( наприклад, формули коренів алгебраїчних рівнянь третього і четвертого степенів), що ними важко користуватися. Крім того, часто константи, що входять у рівняння, відомі наближено, а також точне значення кореня, як, наприклад, *х*=2 , все рівно приходиться замінити його наближеним значенням. Тому при розв’язуванні рівнянь широко використовуються методи, які дозволяють одержати наближений розв’язок з будь-якою заданою точністю.

Нехай задано рівняння *f(x)*=0, де функція *f(x)* визначена і неперервна на деякому відрізку і має на ньому неперервні першу і другу похідні. Корені заданого рівняння являються нулями функції *y=f(x)* і геометрично представляють собою точки перетину її графіку з віссю Ох.

Розглянемо задачу відшукання наближених значень дійсних коренів заданого рівняння з будь-якою заданою точністю. Розв`язок задачі складається з двох етапів:

1. Виділення ( ізоляція) кореня, тобто відшукання відрізка [a;b], який належить області визначення функції *y=f(x)*, на якому знаходиться один і тільки один корінь рівняння *f(x)*=0.
2. Обчислення або уточнення значення кореня з наперед заданою точністю.

# 2.Виділення кореня рівняння

## Умови виділення кореня

Виділення кореня засновується на двох очевидних фактах.

1. На кінцях відрізка [a;b] функція має різні знаки, тобто f(a)\*f(b)<0. Очевидно, що при цьому всередині відрізка [a;b] є принаймні один корінь рівняння f(x)=0. Геометрично це означає, що графік функції y=f(x) в точках a і b знаходиться по різних сторонах від осі ох і, відповідно, всередині відрізка [a;b] обов`язково повинен перетинати вісь ох. Однак ця умова не гарантує існування єдиного кореня. Так, наприклад, на рис.1 f(a)<0, f(b)>0 і всередині відрізка [a;b] є два різних кореня.

Замітимо, що якщо на кінцях відрізка значення функції має один і той

самий знак, то це зовсім не означає, що корінь відсутній. Наприклад, відрізок [a1;b1]

(див. рис.1) містить корінь х1(точка х1, показана на рис.1, являється кратним коренем рівняння f(x)=0. Далі такі корені розглядати не будемо), але f(a1)>0 і f(b1)>0.

Для існування єдиного кореня на [a;b] повинен мати місце ще один факт.

1. На відрізку [a;b] функція f(x) монотонна, тобто її похідна не

міняє знак на [a;b].

Умови 1) і 2) являються достатніми для існування єдиного кореня рівняння

f(x)=0.

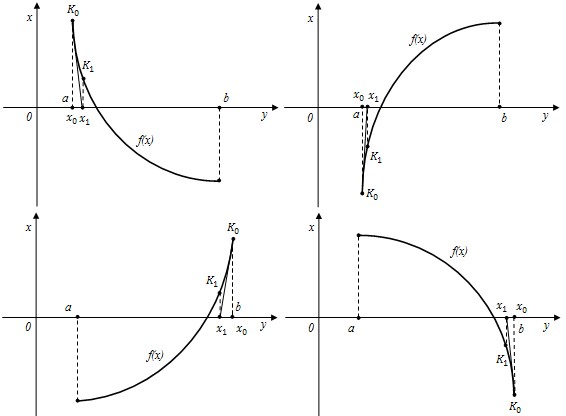
Задача визначення кореня рівняння f(x)=0 являється у відшуканні відрізка [a;b] області визначення функції y=f(x), на якому виконуються три умови:

1. f(a)\*f(b)<0;
2. f ' (x) не міняє знак для х∈[a;b]; 3) f " (x) не міняє знак для х∈[a;b].

Третя умова означає, що графік функції або тільки випуклий, або тільки

вгнутий на відрізку [a;b].

На рис.1 визначені всі можливі варіанти розміщення графіка функції на відрізку [a;b] при виконанні умов 1)-3).



### Рисунок 1

Відрізок [a;b] при виконанні умов 1)-3) для функції f(x) називають

відрізком, що виділяє корінь даної функції.

Виділення кореня можна проводити як аналітично, так і графічно.

## а) Графічний метод

Графічні корені рівняння f(x)=0 можна виділити, побудувавши графік функції y=f(x) і наближено визначивши точки його перетину з віссю ох. Однак задача побудови графіку не завжди проста. Звично рівняння f(x)=0 заміняють еквівалентним рівнянням ϕ1(х)=ϕ2(х) ( f(x)=ϕ1(х)-ϕ2(х)), підбирають функції y1=ϕ1(х) і у2 =ϕ2(х) так, щоб будувати їх графіки було простіше, чим графік функції y=f(x). Абсциси точок перетину графіків y1=ϕ1(х) і у2 =ϕ2(х) будуть шуканими коренями.

ПРИКЛАД: *Виділити графічним методом корені рівняння*

*е*−*x + х* 2 *-2=0.*

*РОЗВ`ЯЗОК: Перепишемо дане рівняння у вигляді е*−*x =2- х*2*і розглянемо дві*

*функції* ϕ1(х)=*е*−*x і* ϕ2(х)*=2- х*2*. Точки перетину графіків цих функцій і є коренями заданого рівняння. Як видно із рисунка, задане рівняння має два дійсних кореня (графіки перетинаються в двох точках), причому один з коренів від`ємний, а другий*

*– додатній. Обидва корені по абсолютній величині не перевищують* 2 *(-* 2 *<x*1*<0, 0<x*2 *<* 2 *).*

б) Метод пробЦей метод полягає в тому, що наугад вибирають точку х=а із області визначення функції (або із більш вужчої області), знаходять знак f(a), а потім підбирають точку b так, щоб значення функції f(b) мало знак, протилежний знаку f(a). Далі визначають знак f ' (x) всередині відрізка [a;b]. Якщо f ' (x) не міняє знак на [a;b], то корінь виділений, в інакшому випадку відрізок [a;b] звужують, взяв точку с, яка лежить посередині відрізка [a;b]. Визначають знак f(c) і в якості нового відрізка розглядають або [a;c] (якщо f(a)\*f(c)<0), або [c;b] (якщо f(c)\*f(a)<0). Позначивши новий відрізок через [a1;b1], повторяють ті самі дії, що на відрізку [a;b], до тих пір, поки не буде знайдено відрізок [a*n* ;b*n* ], який визначає корінь .

*ПРИКЛАД: Методом проб виділити додатній корінь рівняння:*

*х* 4 *+ х* 3 *-36х-20=0.*

*РОЗВ`ЯЗОК: Функція f(x)= х* 4 *+ х* 3 *-36х-20 визначена на всій числовій прямій. Оскільки треба виділити додатній корінь рівняння, розглянемо пів інтервал [0;*∞*].*

1. *Знаходимо f(0)=-20<0. Потім вибираємо будь-яку точку, наприклад х=1, і обчислюємо f(1)=-54<0. Так як f(0)\*f(1)>0, то нічого визначеного про відрізок [0;1] сказати не можна. Треба підібрати так точку х=b, щоб було f(b)>0, а для цього х* 4 *+ х* 3 *повинно бути більше, чим 36х+20. Візьмемо, наприклад, х=4, тоді f(4)=156>0, а відповідно, на відрізку [1;4] є корінь (f(1)\*f(4)<0).*
2. *Оскільки f* ' *(x)=4х* 3 *+3x* 2 *-36=4(х* 3 *-9)+3x* 2 *, то безпосередньою перевіркою переконуємося , що на відрізку [1;4] похідна міняє знак (f* ' *(1)=-29<0; f* ' *(4)=268>0).*

*Звужаємо відрізок [1;4]. Візьмемо, наприклад, точку х=3. Тоді f(3)=-20<0 і*

*f(3)\*f(4)<0. Відповідно на відрізку [3;4] є корінь. Перевіряємо знак похідної. Маємо f* ' *(3)=99>0, а для х>3, очевидно, похідна зростає, тому залишається додатною. Таким чином, корінь виділений. На відрізку [3;4] знаходиться додатній дійсний корінь заданого рівняння. Відмітимо, що f* " *(x)=12x* 2 *+6x>0 для хЄ[3;4]. Графік y=f(x) для хЄ[3;4] має приблизно такий же вигляд, як на рис.1.*

## в) Метод виділення проміжків монотонності

Цей метод полягає в тому, що спочатку визначаємо інтервали монотонності функції f(x) (якщо це не складно), тобто інтервали області визначення функції, в яких похідна зберігає знак. Потім обчислюємо знаки функції на кінцях цих інтервалів і визначаємо інтервал (а;b), на якому похідна зберігає знак і f(a)\*f(b)<0. Задача виділення кореня виконана. Таким способом можна виділити всі дійсні корені рівняння f(x)=0.

Якщо ж серед інтервалів монотонності функції не існує інтервала, на кінцях якого функція має різні знаки, то це означає, що або рівняння f(x)=0 не має дійсних коренів, або такими являються границі інтервалів монотонності, тобто для цих точок функція і похідна цієї функції рівні нулю(див. рис.1, точка х1). Це так називаємі кратні корені.

*ПРИКЛАД: Виділити дійсні корені рівняння*

*x-sinx-1=0.*

*РОЗВ`ЯЗОК: Розглянемо функцію f(x*)= *x-sinx-1, яка визначена на всій*

*числовій прямій.*

1. *Знаходимо першу похідну і інтервали монотонності функції.*

*Одержимо f* ' *(x)=1-cosx, звідси 1-cosx=0, cos x=1, х=2*π*n(n=Z), так, що інтервалами монотонності функції являються всі інтервали виду*

*(2*π*n; 2*π*(n+1)).*

1. *Визначаємо знаки функції в граничних точках інтервалів монотонності. Взявши відрізок [0;2*π*], знаходимо* *f(0)=-1*<0, *f*(*2*π*)=2*π*-1>0 і переконуємося, що на цьому відрізку є один корінь рівняння. По вигляду функції заключаєм, що для х>2*π*буде f(x)>0 (так як sinx<=1 і х>sinx+1), а для х<0 буде f(x)<0 ( так як sinx>=1 і sinx>x-1). Відповідно, в інших інтервалах монотонності функція знаку не міняє. Рівняння має єдиний корінь, що знаходиться на відрізку [0; 2*π*].*

*Враховуючи ще умову 3), знаходимо f* " *(x)=sin x, яка на відрізку[0;2*π*] міняє знак. Відрізком, що виділяє корінь, буде [0;*π*], оскільки*

1. *f(0)=-1, f*(π*)=*π*-1, f(0)\* f*(π*)*<0;
2. *перша похідна не міняє знаку на [0;*π*];*
3. *друга похідна не міняє знаку на [0;*π*];*

# 3.Оцінка наближеного значення кореня

Нехай на відрізку [a;b] виділений корінь рівняння f(x)=0, тоді вякості

наближеного значення кореня х 0 може бути прийнята будь-яка точка х, що лежить всередині [a;b]. Ясно, що чим менший відрізок, тим точніше х буде представляти корінь х 0. Для того, щоб вважати х цілком сприйнятливим, оцінимо різницю *x*0 −*x* , тобто різницю між точним і наближеним значеннями кореня. Очевидно, що *x*0 −*x* < b-a, так як х 0 і х знаходяться всередині [a;b]. Число b-a являється оцінкою наближеного значення х: ∆(х)= b-a. Найчастіше в якості х вибираємо точку, що

1. + *b*

лежить посередині відрізка [a;b], тобто х= 2 , тоді помилка при заміні х 0 на х буде

1. − *a b* − *a*  *a* + *b*

не більше чим 2 , тобто ∆(х)= 2 , причому, по знаках f(a), f 2  , f(b)

 *a* + *b* *a* +*b* 

з`ясовуємо, в якому із відрізків *a*; 2  чи2 ;*b* знаходиться шуканий корінь.

*a* + *b*

Однак стверджувати, що значення х= 2 точніше представляє корінь, чим, наприклад, значення х=а, не має ніяких підстав. Вказані оцінки являються достатньо грубими і не залежать від розглядуваної функції, а лише від довжини відрізка [a;b].

Для уточнення оцінки наближеного значення х кореня х 0 використаємо

формулу скінчених приростів Лагранжа:

f(х 0 )-f(x)=f ' (ξ)( х 0 -x),

де ξ-деяка точка між х 0і х. Так як х 0- корінь рівняння, то f(х 0 )=0 і тоді

*f* ( )*x*

*x*0 −*x* = *f* ' ( )ξ .

Згідно припущенню, f ' (х)≠ 0 і неперервна на [a;b], а тоді існує таке m>0,

*f* ( )*x f* ( )*x*

що *f* ' ( )*x* ≥ m для хЄ[a;b], тобто *f* ' ( )ξ ≥ m і *x*0 −*x* ≤ *m* , відповідно, ∆( )*x* = *m* .

Замітимо, що якщо b-a менше, чим величина ∆( )*x* , то оцінкою буде менше

 *f* ( )*x* 

*b* − *a*;

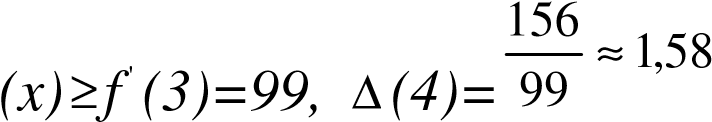
число, тобто ∆( )*x* =min *m* .

*ПРИКЛАД: Оцініть наближене значення кореня, виділеного в прикладі методі проб.*

*РОЗВ`ЯЗОК: В прикладі було виділено, що шуканий корінь знаходиться на*

*відрізку [3;4], відповідно, b-a=1.*

*Приймемо за наближене значення кореня число х=b=4. Тоді f(х)=*

*f(4)=156. Як вказано в прикладі, f* ' *. Але, b-a=1<1,58, а відповідно,* ∆*(4)=min*{1;1,58}=1*, і 3*≤ *x*0 ≤*4. Якщо в якості х взяти, наприклад,*

*a* + *b*

2 *=3,5, то f(3,5)*≈*47>0. Корінь х*0*виділений на відрізку[3;3,5]. Оцінка наближення*

 47

∆(3,5) = min0,5; = 0,47 *х=3,5 буде*  99 *. Накінець, при х=3,2 одержимо: f(3,2)*≈*2,42>0;*

 2,42

∆(3,2) = min0,2; = 0,03

*[3;3,2]- відрізок, що відділяє корінь, і*  99  *. Відповідно, можна вважати, що х*0*=3,2.*

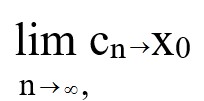
Якщо оцінка одержаного наближеного значення кореня задовольняє

потрібні точності, то задачу можна вважати розв`язаною, в інакшому випадку треба перейти до обчислення або уточнення кореня з заданою точністю.

## 4. Суть методу послідовних наближень

Нехай виконана задача виділення кореня, тобто одержано відрізок [a;b]

такий, що a<x 0<b. Ясно, що чим менший відрізок [a;b], тим точніше вибране значення х (a<x<b) буде представляти корінь x 0 рівняння f(x)=0. Даль ніша задача полягає в послідовному звуженню відрізка [a;b] до тих пір, поки не одержимо значення кореня з заданою точністю. Ідея методу полягає в тому, що спочатку вибираємо деяку точку с1із [a;b] (перше наближення до x 0 ), шуканий корінь при цьому попадає або в [a;с1], або в [с1;b]. Позначимо новий відрізок, виділяючий корінь, через [*a*1;*b*1] (очевидно, що [*a*1;*b*1] міститься в [a;b]), вибираємо в ньому точку с2 (друге наближення до x 0) і знову звужуємо відрізок [*a*1;*b*1], замінивши його на [*a*1;*c*2] або на [*c*2;*b*1] і так далі ., до тих пір, поки не одержимо відрізок [*an*;*bn*], в якому для вибраної точки *cn*(n-го наближення) маємо *x*0 −*cn*<Е, де Е- задана точність наближення. Таким чином будуємо послідовність значень *c*1 ,*c*2 ,*c*3 ,...,*cn*,..., які повинні поступово наближатись до шуканого кореня. Тому цей метод називають *методом послідовних наближень* або *ітераційним процесом.* Потім треба показати, що

, а якщо це так, то ітераційний процес називають *збіжним.* В цьому випадку x0 можна визначити з будь-якою заданою точністю.

Існують різні методи послідовних наближень при відшуканні дійсних

коренів рівняння.

Найбільш простим із цих методів являється метод проб. Однак в цьому методі не враховуються особливості функції і тому можливі надто великі обчислення.

## 5. Метод хорд

Ідея методу полягає в тому, що на відрізку [a,b] будується хорда АВ, що

стягує кінці дуги графіка функції y=f(x), і в якості наближеного значення кореня х 0 вибирається число с=с1, що являється абсцисою точки перетину цієї хорди з віссю ох (рис.1). Для визначення числа с1складемо рівняння хорди як прямої, що проходить через дві точки А(a;f(a)) і В(b;f(b)):

*x* − *a y* − *f* ( )*a*

= *b* − *a f b*( ) − *f* ( ).*a*

Взявши у=0, х=с1, одержимо

*f* ( )(*a b* − *a*) *f b*( )(*b* − *a*)

*c*1 = *b* −

с1=а- *f b*( ) − *f* ( )*a* або *f b*( ) − *f* ( )*a*

Число с1приймаємо за перше наближення до шуканого кореня .

Очевидно, що при зроблених наближеннях про знаки першої і другої

похідних на [a,b] точка (с1;0) буде знаходитися зі сторони вгнутості кривої і розділить [a,b] на два відрізки [a;c1] і [c1;b], в одному з яких знаходиться корінь х 0 (рис.1). Новий відрізок, на якому знаходиться корінь, можна визначити, порівнюючи знаки f(a), f(c1) і f(b). Із аналізу рис.1 видно, що точка с1ближче до точки а, ніж х0, якщо *y* ' \* *y* " >0 (див. рис.1а), і відрізком, на якому знаходиться корінь, буде [c1;b], в іншому випадку, якщо *y* ' \* *y* " <0 (див. рис.2б), відрізком, на якому знаходиться корінь, буде [a;c1].

Далі повторимо ту ж процедуру на новому відрізку, на якому знаходиться корінь, і визначаєм число с2 (друге наближення) по формулах:

)

(

()

)

)(

(

1

1

1

1

2

*fc*

*fb*

*c*

*b*

*fc*

*c*

*c*

−

−

−

=

(

"

'

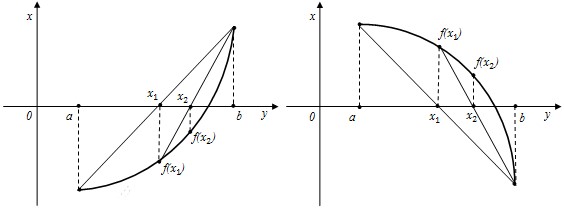
\*

*y*

*y*

>0)

,



()

)

(

)

)(

(

1

1

1

1

2

*a*

*f*

*fc*

*a*

*c*

*fc*

*c*

*c*

−

−

−

=

(

"

'

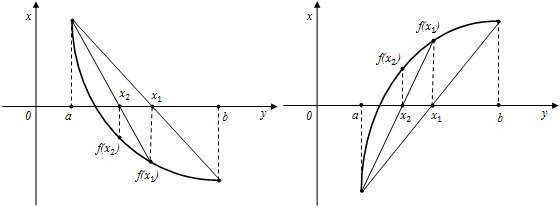
\*

*y*

*y*

<0)

.



### Рисунок 2

Потім по с2 знаходимо с 3 і так далі ( див. рис.2)

Процес призупиняється тоді, коли оцінка одержаного наближення

задовольняє заданій точності.

Для спрощення обчислень часто задають деяке достатньо мале число Е>0 ( не більше заданої точності). Процес зупиняється тоді, коли абсолютна величина різниці між двома наступними наближеннями с*n*−1 і с*n* менше Е. Число с*n* приймають за наближене значення кореня, тобто х= с*n* .

*ПРИКЛАД: Використовуючи метод хорд, уточнити корінь рівняння х* 4 *+ х* 3 *-36х-20=0, який виділений на відрізку [3;4] (див. приклад методу проб).*

*Обмежитись трьома наближеннями.*

*РОЗВ`ЯЗАННЯ: Згідно умови, маємо f(x)= х* 4 *+ х* 3 *-36х-20, f* ' *(x)=4х* 3 *+3x* 2 *-36,*

*f* " *(x)=12x* 2 *+6x і хЄ[3;4].*

*Уточнення кореня буде проходити по алгоритму:*

1. *Для хЄ[3;4] маємо f* ' *(x)>0, f* " *(x)>0, так що y* ' \* *y* " >*0, відповідно,*

*вводимо позначення с* 0 *=а=3, А=b=4. Знаходимо f(А)= f(4)=156.*

*f c*( 0 )(*A*−*c*0 )

*c*1 = *c*0 −

1. *Обчислюємо перше наближення f* (*A*) − *f c*( 0 ) *.*

*Для цього послідовно визначаємо A-c* 0 *=1, f(c* 0 *)=f(3)=-20, f(A)-f(c* 0 *)=176, f c*( 0 )(*A*−*c*0 )

*f* (*A*) − *f c*( 0 ) ≈*-0,1136. Тоді с*1*=3-(-0,1136)=3,1136.*

*f c*( 1 )(*A*−*c*1 )

*c*2 = *c*1 −

*Обчислюємо с*2 *- друге наближення. f* (*A*) − *f c*( 1 ) *, с*2 *=3,1564*

*Третє наближення c*3 *=3,1719.*

*Отже, шуканий корінь знаходиться на відрізку [3,1719;4].*

Обґрунтування методу хорд. Впевнимося, що послідовне застосування методу дозволяє визначити х 0 з будь-якою заданою точністю. Відмітимо, що послідовність с 1 *c*2 ,...,*cn*,...монотонно змінюється і обмежена. Дійсно, при *y* ' \* *y* " >0 маємо с1<c2 <…<c*n*<…< х 0 (див. рис.1а)), а при *y* ' \* *y* " <0 маємо с1>c2 >…>c*n*>…>х 0 (див. рис.1б)). Тут істотно, що друга похідна не міняє знаку на відрізку. Згідно теореми із теореми границь, така послідовність має границюα.

*f c*( *n*−1 )(*A*−*cn*−1 )

*cn* = *cn*−1 −

Перейшовши до границі в формулі *f* (*A*) − *f c*( *n*−1 ) і використавши неперервність f(x), одержимо:

*f* (α)(*A*−α) *f* (α)(*A*−α) α=α− = 0.

*f* (*A*) − *f* (α) , *f* (*A*) − *f* (α)

Звідси f(α)=0, так як А≠α, f(А)≠ *f* (α) . Отже, α є коренем рівняння f(х)=0, але на відрізку [a;b] існує один корінь рівняння, отже, α= *x*0 . Так що послідовні наближення збігаються до кореня х 0 .

*x* −*cn* ≤

*m*

*fc*

*n*

)

(

Оцінка одержаних наближень:, де m- найменше значення

модуля похідної на відрізку.

Покажемо, що при зроблених припущеннях про похідну на відрізку

*f* ' (*cn*) m=.

Нехай *y* ' \* *y* " >0, тоді відрізки, в яких знаходиться корінь, мають вигляд [c*n* ;b]. Якщо у ' >0 і у " >0, то перша похідна зростає і додатня, відповідно, найменше її значення в лівому кінці відрізка, тобто m= *f* ' (*cn*) =f ' (c*n* ); при у ' <0, у " <0 перша похідна спадає (а по абсолютній величині зростає) і найменше значення її модуля знову досягається в лівому кінці відрізка, тобто m= *f* ' (*cn*) =-f ' (*cn*).

Аналогічно розглядаємо при *y* ' \* *y* " <0, беручи відрізки [a;c*n* ]. Відповідно,

*f c*( *n*) *f c*( *n*)

*x*0 −*cn* ≤ ' ∆(*cn*) = '

*f* (*cn*) і *f* (*cn*) (\*)

*Вернемось до розв`язування прикладу і використаємо формули(\*).*

∆(*cn*) = *0,009; с* 3 *=3,1719 відрізняється від х* 0 *не більше чим на 0,009. Оскільки сn в даному прикладі наближається до кореня зліва (див. рис. 1а)), то*

*3,172<x* 0 *<3,181.*

Примітка: Для спрощення розрахунків в формулі \* *f* ' (*cn*) можна замінити

*f c*( *n*)

' ' " ' ' " ∆(*cn*) = ' ' "

на *f* ( )*a* , якщо *y* \* *y* >0, і на *f* ( )*b* , якщо *y* \* *y* <0, тобто *f* ( )*a* , якщо *y* \* *y* >0,

*f c*( *n*)

∆(*cn*) = ' ' "

і *f* ( )*b* , якщо *y* \* *y* <0. При такій заміні оцінка буде грубшою, але обчислення простіші.

## 6. Метод дотичних

Ідея методу полягає в тому, що в одному із кінців дуги АВ графіка функції y=f(x) проводиться дотична до цієї дуги і в якості наближеного значення кореня х 0 вибирається число d1(перше наближення) - абсциса точки перетину цієї дотичної з віссю ох (рис. 3). Як відомо рівняння дотичної до кривої y=f(x) в точці (x1;f(x1)) має вигляд y-f(x1)=f ' (*x*1 )(x-x1). Відповідно, y-f(a)=f ' (a)(x-a) – рівняння дотичної в точці А(a;f(a)), a y-f(b)=f ' (b)(x-b) – в точці B(b;f(b). Поклавши у=0, а х=d1, визначаємо

*f* ( )*a f b*( )

*d*1 = *a* − ' *d*1 = *b* − '

абсцису точки перетину дотичної з віссю ох: *f* ( )*a* або *f* ( )*b* .

Очевидно, що точка (d1;0) буде знаходиться зі сторони випуклості кривої. Точка d1розділить [a;b] на два відрізки [a;d1] і [d1;b], в одному із яких розміщена точка х 0 . Якщо у ' у " >0, це буде відрізок [a;d1] (дотична проводиться в точці В, див. рис.3а), а при у ' у " <0 - відрізок [d1;b] (дотична проводиться в точці А, див. рис.3б). Визначивши новий проміжок на якому знаходиться корінь, процедуру повторяємо.

При цьому дотичну проводимо в точці (d1;f(d1)) (див. рис.3) і визначаємо друге

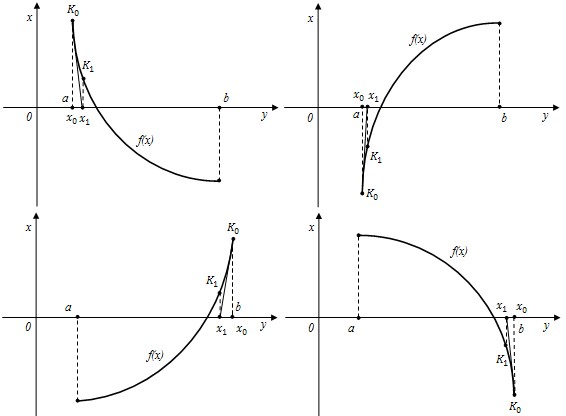
*f* (*d*1 )

*d* 2 = *d*1 − '

наближення - точку d2 по формулі: *f* (*d*1 ) .

Потім по d2 знаходимо третє наближення d 3 і т.д. Процес призупиняється

тоді, коли абсолютна величина різниці двох наступних наближень d*n*−1 і d*n* менше заданого Е>0, тобто *dn* −*dn*−1<*E* , і покладемо, що х=d*n* (число Е не перевищує заданої точності наближення і служить сигналом для зупинення обчислень).



### Рисунок 3

*ПРИКЛАД: Користуючись методом дотичних, уточнити корінь рівняння x*4 + *x*3 −36*x* −20 = 0*, який виділений на відрізку [3;4]. Обмежитись трьома*

*наближеннями(див. приклад з методу хорд).*

*Розв`язок: Згідно умови, маємо f(x)= х* 4 *+ х* 3 *-36х-20, f* ' *(x)=4х* 3 *+3x* 2 *-36, f* " *(x)=12x* 2 *+6x і х* 0 *Є[3;4]. Уточнення кореня будем проводити по алгоритму.*

*1.Для хЄ[3;4] буде у* ' *у* " *>0, так що покладаєм d* 0 *=b=4.*

*2а). Маємо нульове наближення d* 0 *. Визначаємо перше наближення d*1*по*

*f* (*dn*−1 ) *f* (*d* 0 )

*dn* = *dn*−1 − ' *d*1 = *d* 0 − ' *формулі* *f* (*dn*−1 ) (\*)  *при n=1: f* (*d* 0 ) *.*

*f* (*d* 0 )

' ' ' ≈

*Послідовно находимо, що f(d* 0 *)=f(4)=156, f* (*d* 0 ) = *f* (4)*=268, f* (*d* 0 ) *0,5821, і*

*d*1 ≈*4-0,5821=3,4179.*

*2б). Обчислюємо d*2 *- друге наближення. Кладучи в формулі(\*) n=2,*

*f* (*d*1 )

*d* 2 = *d*1 − '

*знаходимо f* (*d*1 ) *. Виконуючи відповідні обчислення, одержимо d*2 *=3,2078.*

*2в). Аналогічно по формулі(\*) при n=3 знаходимо третє наближення*

*f* (*d* 2 )

*d*3 = *d* 2 − ' ≈ 3,1809 *f* (*d* 2 ) *.*

Обґрунтування методу дотичних. Покажемо, що послідовність *d*1 ,*d* 2 ,...,*dn*,...

збігається і має своєю границею значення кореня х 0 . Відмітимо, що при у ' у " >0 маємо *d*1 > ... > *dn* > ... > *x*0 (див. рис. 1а), а при у ' у " <0 маємо *d*1 < *d* 2 < ... < *dn* < ... < *x*0 (див. рис 1б). При цьому послідовність *dn* прямує до α при n прямує до нескінченості

(послідовність *dn* монотонно міняється і обмежена). Переходячи до границі в формулі (\*) і використовуючи неперервність f(x) і f ' (x), як в методі хорд, знаходимо

*f* ( )*x*

α= *x*0 . Одержані наближення оцінюються по формулі ∆( )*x* = *m* , причому *m* = *f* ' ( )*a*

*f* (*dn*) *f* (*dn*)

∆(*dn*) = ' ' ∆(*dn*) = '

і *f* ( )*a*  при у ' у " >0, *m* = *f* ( )*b* і *f* ( )*b*  при у ' у " <0.

В розглянутому прикладі у ' у " >0, тому оцінка кожного наближення

*f* (*dn*)

∆(*dn*) = ' '

обчислюється по формулі *f* ( )*a* , де *f* ( )*a* = 99. Маємо ∆(*d*1) = 0,337,

∆(*d*2) = 0,034, ∆(*d*3 ) = 0,0005. Видимо, що для *d* 3 =3,1809 оцінка ∆(*d*3 ) = 0,0005 і наближення *d* 3 обчислене з трьома точними десятковими значеннями.

Оскільки числа *dn* визначають в цьому випадку корінь х 0 з недостачею, то

3,1804< х 0 <3,1809.

## 7. Комбінований метод

Ідея методу полягає в об`єднанні метода хорд і метода дотичних. Із рисунка 1 і попередніх описань цих методів видно, що наближення с*n* , обчислюване по методу хорд, прямує до кореня х 0 зі сторони вгнутості кривої, а наближення d*n* , обчислюване по методу дотичних,- зі сторони опуклості кривої. При цьому для будьякого наближення маємо: с*n* <x 0 < d*n* при у ' у " >0, d*n* < x 0 < с*n* при у ' у " <0. Відповідно, комбінуючи ці два методи і визначаючи с*n* і d*n* , послідовно на кожному кроці звужуємо з двох сторін відрізок, всередині якого знаходиться корінь x 0 . Процес призупиняється тоді, коли*dn* −*cn*<*E* , де Е- задана точність обчислення.

За наближене значення кореня частіше беремо точку, що належить середині

*cn* +*dn*

відрізка, тобто х= 2 , так що *x*0 −*x* ≤ *dn* −*cn* <E.

## 8. Метод половинного поділу

Метод половинного поділу також можна віднести до методу послідовних наближень. По своїй ідеї метод простий і фактично аналогічний методу проб, але його реалізація пов`язана з довгими обчисленнями ( великим числом ітерацій) і тому при ручних обчисленнях метод половинного поділу не застосовується. При використанні програмування цей метод набагато простіший, так як не потребує обмежуючих умов для першої і другої похідних.

Алгоритм методу половинного поділу. Нехай відомо, що на відрізку [a;b] знаходиться один єдиний корінь рівняння f(x)=0, відповідно, f(a)\*f(b)<0. Треба визначити цей корінь з заданою точністю Е.

Суть методу полягає в тому, що відрізок [a;b] ділимо пополам точкою

*a* + *b*

с1= 2 (перше наближення) і розглядаємо той із відрізків [a;c1] або [c1;b], який містить шуканий корінь. Позначимо цей відрізок через [*a*1;*b*1], причому

1. *a*1 +*b b*1 − *a*1 = *b* − *a* 2 = 1
2. , визначаємо точку с 2 (друге наближення) і розглядаємо відрізок [a1;c2 ] або [c2 ;b1], що містить шуканий корінь, тобто [a2 ;b2 ],

1

*b*2 − *a*2 = 2 *b* − *a*

де2 , і так далі, до тих пір, поки не одержимо відрізок [a*n*;*bn*], що

1

*bn* − *an* = *n b* − *a* містить шуканий корінь х 0 , для якого 2 <E (\*).

*an* +*bn*

*n*+1 = =*x*

Точку с 2 приймаємо за наближене значення кореня х 0 . Із (\*)

видно, що *x*0 −*x* <0.

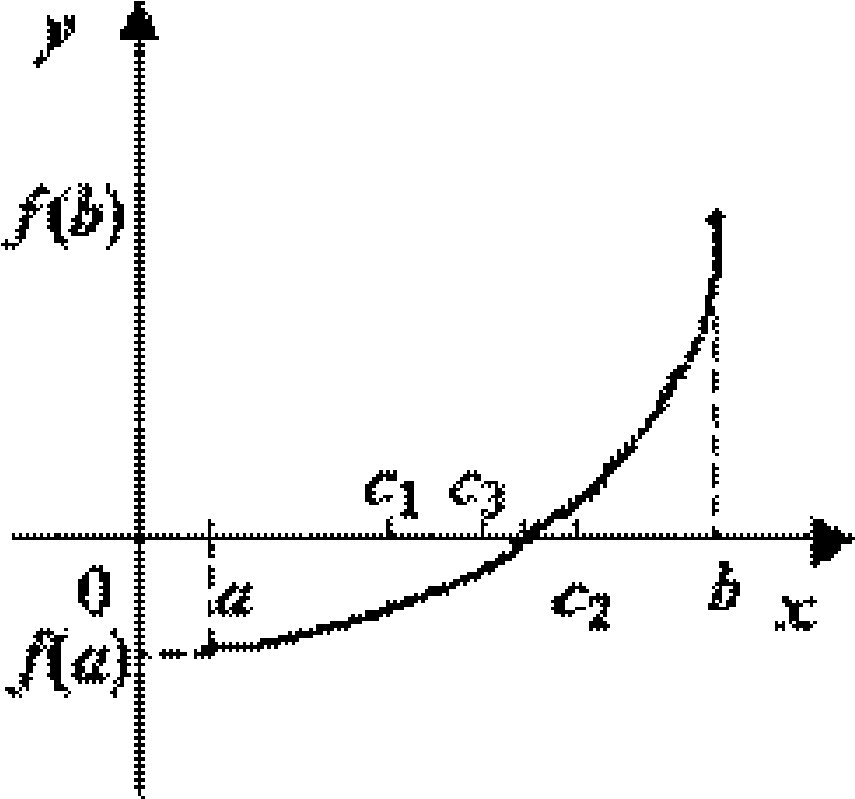
Із (\*) можна наперед визначити число n послідовних наближень,

 *b* − *a*  *b* − *a*  lg +1 *E*  lg2 

lg

*E*

необхідних для визначення кореня при заданім Е: n> lg2 , або n=  .



# 9.Метод простої ітерації

Розглянемо рівняння х=ϕ( )*x* (0)

Нехай [a;b] – відрізок, що виділяє корінь х 0 цього рівняння, тобто х 0 =ϕ(*x*0 ) . Вибираємо довільну точку с 0 Є [a;b] і першим наближенням називаємо число с1, де с1=ϕ(*c*0 ), по першому наближенню будуємо друге с2=ϕ(*c*1)і так далі с*n*=ϕ(*cn*−1 ) (1)

Таким чином будується послідовність наближень *c*0 ,...,*cn*,.... Якщо ця послідовність збігається, причому с*n* прямує до х 0 при n прямуючому до нескінченості, то за скінчене число ітерацій буде одержано наближення с*n* , яке представляє наближене значення кореня з заданою точністю Е, тобто *x*0 −*cn* <E.

Однак ітераційний процес, що визначається формулою (1), не завжди збігається. Вияснимо спочатку геометричний зміст процесу і його збіжності.

Корінь рівняння (0) – це абсциса х 0 точки перетину прямої у=х і графіка

функції у=ϕ( )*x* ; с 0 - довільна точка на осі ох; с1- абсциса точки перетину прямих y=ϕ(*c*0 )і y=x .

По с1визначаємо с2 як абсцису точки перетину прямих *y*=ϕ(*c*1) і у=х і так

далі.

Встановимо умови збіжності. Оскільки х 0 - точне значення кореня рівняння

(0), то х 0 =ϕ(*x*0 ) і, обчислюючи це співвідношення із (1), одержимо

*cn* − *x*0 =ϕ(*cn*−1 ) −ϕ(*x*0 ) .

Застосуємо до правої частини рівності формулу скінчених приростів

Лагранжа ϕ(*cn*−1 )−ϕ(*x*0 ) =ϕ' ( )(ξ *cn*−1 − *x*0 ), де с*n*−1 <ξ< *x*0 ( *x*0 <ξ<с*n*−1 ), тоді *cn* − *x*0 =ϕ' ( )(ξ *cn*−1 − *x*0 ), або *cn* − *x*0 =ϕ' ( )ξ *cn*−1 − *x*0 .

Нехай М – найбільше значення ϕ' ( )*x* на [a;b], тоді *cn* −*x*0 ≤*Mcn*−1 −*x*0 , (2) і якщо ϕ' ( )*x* ≤ *M* <1, (3)

то *cn* −*x*0 < *cn*−1 −*x*0 , тобто с*n* ближче до х 0 чим с*n*−1 . Покажемо, що при виконанні умови (3) послідовність *c*0 ,*c*1 ,*c*2 ,... збігається до х 0 . Для цього будемо послідовно використовувати нерівність (2):

*cn* −*x*0 ≤*Mcn*−1 −*x*0≤*M*2*cn*−2 −*x*0≤ ... ≤*Mnc*0 −*x*0 .

Переходячи в останній нерівності до границі при *n*→∞ і враховуючи, що М*n*→0, одержимо границя (с*n*- х 0 ) дорівнює нулю при n прямуючому до нескінченості, тобто границя с*n*дорівнює х 0 при n прямуючому до нескінченості.

Знайдемо оцінку n-го наближення. Застосовуючи формулу (2), одержимо:

*n*−1 (М<1) (4)

*n*

*n*

*n*

*n*

*n*

*n*

*n*

*n*

*c*

*c*

*M*

*x*

*c*

*M*

*c*

*c*

*x*

*c*

*M*

*x*

*c*

*M*

*x*

*c*

−

+

−

≤

−

+

−

=

−

≤

−

−

−

−

1

0

1

0

0

1

0

)

(

)

(

.

Звідси

0

1

−

−

≤

−

*n*

*n*

*c*

*c*

*M*

*M*

*x*

*c*

Якщо

М

2

1

≤

,

то

0

−

≤

−

*n*

*c*

*c*

*x*

*c*

*n n*−1 і оцінка наближення с*n* зводиться до оцінки модуля

різниці двох послідовних наближень.

Застосуємо тепер метод ітерацій до розв`язання рівняння f(x)=0. Для цього

запишемо його у вигляді х=х+λ*f* ( )*x* , (5) де λ- довільний параметр. Рівняння (5), очевидно, еквівалентне рівнянню f(x)=0.

Прирівнявши рівняння (5) і (0), бачимо, що ϕ( )*x* =х+λ*f* ( )*x* . Вибираємо тепер λ так, щоб була виконана умова збіжності (3): ϕ' ( )*x* <1 або1+λ*f* ' ( )*x*  <1.

2

Розв’язуючи цю нерівність, одержимо, що при f ' (x)>0 повинно бути 0>λ>- *f* ' ( )*x* , а 2

при f ' (x)<0 повинно бути - *f* ' ( )*x* >λ>0. Якщо функція f(x) має на [a;b] обмежену

2 2

похідну, тобто *f* ' ( )*x* ≤ *M* , то при f ' (х)>0 0>λ>− *M* , а при f ' (х)<0 *M* >λ> 0 .

Вибравши λ, що задовольняє цим нерівностям, забезпечуємо умову (3) збіжності процесу ітерацій для рівняння (5), а відповідно, і для вихідного рівняння f(x)=0.

1

*ПРИКЛАД: Рівняння 2ln x- x =0 перетворити до вигляду, що допускає*

*застосування методу ітеракцій. Корінь виділений на відрізку[1;2].*

 1  λ2ln *x* − 

*Розв`язок: Представимо рівняння у вигляді х=х+*  *x**.*

 1 

*Тоді* ϕ( )*x = х+*λ2ln *x* − *x**. Виберемо* λ *так, щоб* ϕ' ( )*x* <*1 для хЄ[1;2]. Маємо*

ϕ' ( )*x* =1+λ 2 + 12  1+λ 2 + 12 

 *x x* *. Звідси*  *x x*  *<1. Розв`язуючи цю нерівність, одержимо -*

λ 2 + 12  λ 2 + 12 

*1<1+*  *x x* *<1, -2<*  *x x* *<0.*

2 1 2

≥ + 2 <λ< 0

*Так як на [1;2] 3 x x >0, то -2<3*λ*<0, -* 3 *. Будь-яке значення параметра* λ, *що задовольняє одержану нерівність, можливе для застосування методу ітерацій.*

**Завдання:**

1. **Виділити відрізок на якому існує єдиний корінь.**
2. **Обчислити значення кореня рівняння з точністю ℰ=0,001 за допомогою наступних методів ( тобто програмно реалізувати) згідно отриманих варіантів:**

* Метод хорд;
* Метод дотичних;
* Комбінований метод;
* Метод половинного поділу
* Метод простої ітерації

